Demostración. Por el postulado 5, $a \cdot \overline{a} = 0$ y $a + \overline{a} = 1$. Por tanto, $\overline{a}$ es el complemento de a, y también a es el complemento de $\overline{a}$. Como el complemento de $\overline{a}$ es único, se sigue que $\overline{\overline{a}} = a$.

Ahora utilizaremos el material anterior para resumir todas las propiedades de los elementos únicos 1 y 0 en la tabla 2.1. Las propiedades • (AND) de 1 y 0 nos recuerdan las propiedades fundamentales de la multiplicación en las matemáticas ordinarias; sin embargo, las propiedades + (OR) hacen ver de inmediato que no estamos tratando con las matemáticas que hemos estudiado con anterioridad, y no podemos suponer ninguna de las propiedades matemáticas usuales para su uso en el álgebra booleana. Sólo debemos utilizar los postulados y teoremas que estamos desarrollando, pues trabajamos en un sistema completamente nuevo y diferente.

En el siguiente teorema establecemos la propiedad de absorción del álgebra booleana. La absorción no tiene contraparte en el álgebra "ordinaria".

Teorema 4. Absorción

(a) $a + ab = a$.

(b) $a(a + b) = a$.

Demostración. Demostraremos la parte (a).

$$
\begin{aligned}
a + ab &= a \cdot 1 + ab && [\text{P2(b)}]\\
&= a(1 + b) && [\text{P5(b)}]\\
&= a(b + 1) && [\text{P3(b)}]\\
&= a \cdot 1 && [\text{T2(a)}]\\
&= a && [\text{P2(b)}]
\end{aligned}
$$

Podemos visualizar fácilmente el teorema 4 con un diagrama de Venn. Los siguientes ejemplos ilustran el uso de este teorema.

MPLO 2.4

$$(X + Y) + (X + Y)Z = X + Y \qquad [\text{T4(a)}]$$

MPLO 2.5

$$A\overline{B}(A\overline{B} + \overline{B}C) = A\overline{B} \qquad [\text{T4(b)}]$$

MPLO 2.6

$$A\overline{B}C + \overline{B} = \overline{B} \qquad [\text{T4(a)}]$$

TABLA 2.1 PROPIEDADES DE LOS ELEMENTOS 0 Y 1

OR	ADN	COMPLEMENTO
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$	$\bar{0} = 1$
$a + 1 = 1$	$a \cdot 1 = a$	$\bar{1} = 0$

Los siguientes tres teoremas son similares a la absorción en el sentid
que pueden servir para eliminar elementos adicionales de una expresión boole

Teorema 5.

(a) $a + \bar{a}b = a + b$.

(b) $a(\bar{a} + b) = ab$.

Demostración. La parte (a) del teorema se demuestra como sigue:

$$\begin{aligned} a + \bar{a}b &= (a + \bar{a})(a + b) && \text{[P5(a)]} \\ &= 1 \cdot (a + b) && \text{[P6(a)]} \\ &= (a + b) \cdot 1 && \text{[P3(b)]} \\ &= (a + b) && \text{[P2(b)]} \end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del teorema 5 para simplificar expresiones booleanas.

EJEMPLO 2.7

$$B + A\bar{B}\bar{C}D = B + A\bar{C}D \qquad \text{[T5(a)]}$$

EJEMPLO 2.8

$$\bar{Y}(X + Y + Z) = \bar{Y}(X + Z) \qquad \text{[T5(b)]}$$

EJEMPLO 2.9

$$(X + Y)(\overline{(X + Y)} + Z) = (X + Y)Z \qquad \text{[T5(b)]}$$

EJEMPLO 2.10

$$AB + \overline{(AB)}C\bar{D} = AB + C\bar{D} \qquad \text{[T5(a)]}$$

Teorema 6.

(a) $ab + a\bar{b} = a$.

(b) $(a + b)(a + \bar{b}) = a$.

Demostración. La parte (a) del teorema se demuestra como sigue:

$$\begin{aligned} ab + a\bar{b} &= a(b + \bar{b}) && \text{[P5(b)]} \\ &= a \cdot 1 && \text{[P6(a)]} \\ &= a && \text{[P2(b)]} \end{aligned}$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del teorema 6 para simplificar expresior
booleanas.

EJEMPLO 2.11

$$ABC + A\bar{B}C = AC \qquad \text{[T6(a)]}$$

EJEMPLO 2.12

$$(AD + B + C)(AD + \overline{(B + C)}) = AD \qquad \text{[T6(b)]}$$

EJEMPLO 2.13

Simplificar $(\bar{W}+\bar{X}+\bar{Y}+\bar{Z})(\bar{W}+\bar{X}+\bar{Y}+Z)$
$(\bar{W}+\bar{X}+Y+\bar{Z})(\bar{W}+\bar{X}+Y+Z)$.

$$= (\bar{W}+\bar{X}+\bar{Y})(\bar{W}+\bar{X}+Y+\bar{Z})(\bar{W}+\bar{X}+Y+Z) \quad [T6(b)]$$
$$= (\bar{W}+\bar{X}+\bar{Y})(\bar{W}+\bar{X}+Y) \quad [T6(b)]$$
$$= (\bar{W}+\bar{X}) \quad [T6(b)]$$

Teorema 7.

(a) $ab + a\bar{b}c = ab + ac$.

(b) $(a + b)(a + \bar{b} + c) = (a + b)(a + c)$.

Demostración. La parte (a) del teorema se demuestra como sigue:

$$ab + a\bar{b}c = a(b + \bar{b}c) \quad [P5(b)]$$
$$= a(b + c) \quad [T5(a)]$$
$$= ab + ac \quad [P5(b)]$$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del teorema 7 para simplificar las expresiones booleanas.

EJEMPLO 2.14

$$xy + x\bar{y}(\bar{w} + \bar{z}) = xy + x(\bar{w} + \bar{z}) \quad [T7(a)]$$

EJEMPLO 2.15

$$(\bar{x}\bar{y} + z)(w + \bar{x}\bar{y} + \bar{z}) = (\bar{x}\bar{y} + z)(w + \bar{x}\bar{y}) \quad [T7(b)]$$

EJEMPLO 2.16

$$(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C})(\bar{B} + C)(A + \bar{B}) = (\bar{A} + \bar{B})(\bar{B} + C)(A + \bar{B}) \quad [T7(b)]$$
$$= \bar{B}(\bar{B} + C) \quad [T6(b)]$$
$$= \bar{B} \quad [T4(b)]$$

EJEMPLO 2.17

$$w\bar{y} + w\bar{x}y + wxyz + wx\bar{z} = w\bar{y} + w\bar{x}y + wxy + wx\bar{z} \quad [T7(a)]$$
$$= w\bar{y} + wy + wx\bar{z} \quad [T6(a)]$$
$$= w + wx\bar{z} \quad [T6(a)]$$
$$= w \quad [T4(a)]$$

En los siguientes capítulos veremos que estos teoremas forman la base de algunos métodos estándar y automatizados por computadora para simplificar expresiones booleanas.

Al trabajar con álgebra booleana, con frecuencia necesitamos determinar el complemento de una expresión booleana. El siguiente teorema proporciona la base para esta operación.

EJEMPLO 2.18

Complementar la expresión $a + bc$.

$$\begin{aligned}\overline{a + b \cdot c} &= \overline{a + (b \cdot c)} \\ &= \bar{a} \cdot \overline{(b \cdot c)} \\ &= \bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) \\ &= \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}\end{aligned}$$

Observe que: $\overline{a + b \cdot c} \neq \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{c}$

Los siguientes ejemplos ilustran el uso del teorema de DeMorgan.

EJEMPLO 2.19

$$\begin{aligned}\overline{X + \bar{Y}} &= \bar{X} \cdot \bar{\bar{Y}} &&[\text{T8(a)}] \\ &= \bar{X} \cdot Y &&[\text{T3}]\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.20

Complementar la expresión $a\,(b + z(x + \bar{a}))$, y simplificar el resultado de modo que los únicos términos complementados sean variables individuales.

$$\begin{aligned}\overline{a(b + z(x + \bar{a}))} &= \bar{a} + \overline{(b + z(x + \bar{a}))} &&[\text{T8(b)}] \\ &= \bar{a} + \bar{b}\,\overline{(z(x + \bar{a}))} &&[\text{T8(a)}] \\ &= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \overline{(x + \bar{a})}) &&[\text{T8(b)}] \\ &= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \bar{x} \cdot \bar{\bar{a}}) &&[\text{T8(a)}] \\ &= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \bar{x}a) &&[\text{T3}] \\ &= \bar{a} + \bar{b}(\bar{z} + \bar{x}) &&[\text{T5(a)}]\end{aligned}$$

EJEMPLO 2.21

Repetir el ejemplo 2.20 para la expresión $a(b + c) + \bar{a}b$.

$$\begin{aligned}\overline{a(b + c) + \bar{a}b} &= \overline{ab + ac + \bar{a}b} &&[\text{P5(b)}] \\ &= \overline{b + ac} &&[\text{T6(a)}] \\ &= \bar{b}(\overline{ac}) &&[\text{T8(a)}] \\ &= \bar{b}(\bar{a} + \bar{c}) &&[\text{T8(b)}]\end{aligned}$$

Como ilustra este último ejemplo, con frecuencia podemos simplificar el proceso de complementar una expresión reduciéndola antes de aplicar el teorema de DeMorgan.

Así, el teorema de DeMorgan presenta la técnica general para complementar expresiones booleanas. Será de especial utilidad en la manipulación de expresiones booleanas a fin de darles formatos adecuados para su realización con tipos específicos de compuertas lógicas.

El último teorema fundamental del álgebra booleana que consideraremos es el teorema de consenso.

Teorema 9. Consenso

(a) $ab + \bar{a}c + bc = ab + \bar{a}c.$
(b) $(a + b)(\bar{a} + c)(b + c) = (a + b)(\bar{a} + c).$

Demostración. De aquí en adelante, utilizaremos los postulados 3 y 4 sin indicarlo de manera explícita.

$$\begin{aligned}
ab + \bar{a}c + bc &= ab + \bar{a}c + 1 \cdot bc && [\text{P2(b)}]\\
&= ab + \bar{a}c + (a + \bar{a})bc && [\text{P6(a)}]\\
&= ab + \bar{a}c + abc + \bar{a}bc && [\text{P5(b)}]\\
&= (ab + abc) + (\bar{a}c + \bar{a}cb) &&\\
&= ab + \bar{a}c && [\text{T4(a)}]
\end{aligned}$$

La clave para utilizar este teorema es un elemento y su complemento, encontrar los términos asociados y eliminar el término incluido (el término de "consenso"), el cual está compuesto de los términos asociados.

El teorema de consenso es útil para reducir expresiones booleanas y para desarrollar expresiones en los diversos algoritmos de minimización automatizada que describiremos más adelante.

EJEMPLO 2.22

$$AB + \bar{A}CD + BCD = AB + \bar{A}CD \qquad [\text{T9(a)}]$$

EJEMPLO 2.23

$$(a + \bar{b})(\bar{a} + c)(\bar{b} + c) = (a + \bar{b})(\bar{a} + c) \qquad [\text{T9(b)}]$$

EJEMPLO 2.24

$$\begin{aligned}
ABC + \bar{A}D + \bar{B}D + CD &= ABC + (\bar{A} + \bar{B})D + CD && [\text{P5(b)}]\\
&= ABC + \overline{AB}D + CD && [\text{T8(b)}]\\
&= ABC + \overline{AB}D && [\text{T9(a)}]\\
&= ABC + (\bar{A} + \bar{B})D && [\text{T8(b)}]\\
&= ABC + \bar{A}D + \bar{B}D && [\text{P5(b)}]
\end{aligned}$$

En cada uno de los ejemplos anteriores, un elemento o expresión y su complemento son la clave para reducir la expresión.

Es importante señalar que es fácil demostrar los teoremas presentados por medio de diagramas de Venn. Por tanto, aconsejamos a los lectores utilizar esta imagen gráfica como ayuda para recordar los teoremas importantes. La tabla 2.2 resume los postulados y teoremas básicos del álgebra booleana. Más adelante presentaremos el teorema 10, incluido en esta tabla.